CAPÍTULO 1

FUNÇÕES VETORIAIS

1.1 Introdução

Em Cálculo 1A, estudamos as *funções reais de uma variável real*, i.e. funções da forma

$$\begin{array}{rccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$$

Como exemplo de funções reais de uma variável real, podemos citar $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Muitos conceitos e propriedades relativos a estas funções tais como, gráficos, limites, continuidade, taxas de variação e máximos e mínimos foram abordados e aplicados em diversas situações práticas.

Em Cálculo 2B, trabalharemos com funções mais gerais, que são as funções de mais de uma variável real e que tomam seus valores em $\mathbb{R}^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$ e vamos desenvolver um estudo análogo ao realizado em Cálculo 1A. Estas funções, chamadas de *funções vetoriais de várias variáveis reais* estão definidas na próxima seção.

1.2 Funções Vetoriais

DEFINIÇÃO 1.2.1: Dado um conjunto $Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, uma *função vetorial* F *de* n *variáveis reais* é uma correspondência que a cada ponto $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(F)$, associa um e apenas um $Y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$. De forma simbólica, escrevemos

$$\begin{array}{rccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & & X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (y_1, y_2, ..., y_m). \end{array}$$

O conjunto $Dom(F)$ é chamado de *domínio* da função F.

Dada uma função vetorial

$$\begin{array}{rccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (y_1, y_2, ..., y_m), \end{array}$$

temos que existem e são únicas, m funções reais, cada uma dependendo de n variáveis reais, $f_i : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, tais que, para todo $X \in Dom(F)$,

$$F(X) = (y_1, y_2, ..., y_m) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)).$$

As funções $f_i, i = 1, ..., m$, são chamadas de *funções coordenadas de* F ou *funções componentes de* F. Portanto, utilizando as funções coordenadas, representamos a função F, simbolicamente, como

$$\begin{array}{rccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)). \end{array}$$

Como exemplo de função vetorial de uma variável real, podemos citar $F(t) = (\cos t\ ,\ \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$ e, como exemplo de função vetorial de várias variáveis reais, podemos citar $F(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ xy\ ,\ x + y\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Observação 1.2.1: Um ponto ou vetor $X \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado em coordenadas relativas à base canônica do $\mathbb{R}^n$, tanto na horizontal, como um *vetor linha*, quanto na vertical, como um *vetor coluna*. Isto é, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ou $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Em relação ao domínio da função F temos um importante comentário a fazer. Continuaremos aqui abusando da linguagem, tal como fizemos em Cálculo 1A. Isto é, quando a função F for dada por sua expressão algébrica e fizermos a pergunta: *"qual é o domínio da função F?"* estaremos de fato perguntando: *"qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$, no qual F está bem definida?"*, isto é *"qual é o maior subconjunto $Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $F(X)$ é um elemento de $\mathbb{R}^m$, para todo $X \in Dom(F)$?"*. Utilizando as funções coordenadas, esta pergunta pode ainda ser reformulada como: *"qual é o maior subconjunto $Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $f_i(X) \in \mathbb{R}$, para todo $X \in Dom(F)$, com $i = 1, ..., m$?"* Desta forma, podemos ver que, chamando de D_i o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$, no qual a expressão algébrica dada por $f_i(X)$ está bem definida, o domínio da função F é a interseção de todos os D_i, $i = 1, ..., m$, i.e. $Dom(F) = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$. Confira os exemplos abaixo.

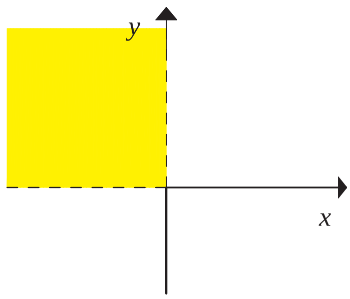
Exemplo 1.2.1: Determine e esboce o domínio da função

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{-x}}\right).$$

Solução: Vamos primeiro identificar as duas funções coordenadas de F. Neste caso, temos que $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ e $f_2(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$. Chamando de D_i, $i = 1,2$, o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no qual a expressão algébrica dada por $f_i(x,y)$ está bem definida, concluímos que, $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0\}$. Desta forma, como $Dom(F) = D_1 \cap D_2$, segue que

$$Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0 \text{ e } x < 0\}.$$

Na figura ao lado, temos um esboço de $Dom(F)$ (em amarelo).



$\square$

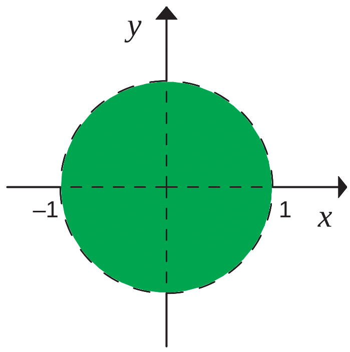
Exemplo 1.2.2: Determine e esboce o domínio da função

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \right).$$

Solução: Vamos primeiro identificar as três funções coordenadas de F. Neste caso, temos que $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$, $f_2(x,y) = \dfrac{x}{y}$ e $f_3(x,y) = \dfrac{y}{x}$. Chamando de D_i, $i = 1,2,3$, o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no qual a expressão algébrica dada por $f_i(x,y)$ está bem definida, concluímos que, $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$ e $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$. Desta forma, como $Dom(F) = D_1 \cap D_2 \cap D_3$, segue que

$$Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1, y \neq 0 \text{ e } x \neq 0\}.$$

Na figura ao lado, temos um esboço de $Dom(F)$ (em verde).



$\square$

A seguir, apresentamos os conceitos de *imagem*, *gráfico* e *conjunto de nível* de funções vetoriais de várias variáveis reais.

Dada a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos os seguintes conjuntos

- Imagem de F: $Im(F) = \{F(X) \in \mathbb{R}^m \,|\, X \in Dom(F)\}$.

- Gráfico de F: $Gr(F) = \{(X, F(X)) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, X \in Dom(F)\}$.

- Conjunto de Nível K de F: dado $K \in Im(F)$,
  $C_K(F) = \{X \in Dom(F) \,|\, F(X) = K\}$.

Observação 1.2.2: Em Cálculo 1A, a visualização dos gráficos ajudava em muito a compreensão das funções reais de uma variável real, que eram nossa matéria prima. Em tempo, lembre-se que dada uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seu gráfico é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por, $Gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in Dom(f)\}$. Em se tratando de uma função vetorial de várias variáveis reais, $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a visualização do conjunto de pares ordenados $(X, F(X))$, $X \in Dom(F)$, que constitui o gráfico da função F, continua de grande valia para um melhor entendimento das funções. Entretanto, vale a pena ressaltar que tal visualização apenas será possível se $n + m \leq 3$ (Exemplos 1.2.4, 1.2.6 e 1.2.10, a seguir).

Observação 1.2.3: Em Cálculo 1A, não era de muito interesse pedir ao aluno que esboçasse o domínio ou a imagem de função reais de uma variável real, pois tais conjuntos seriam simplesmente subconjuntos da reta. Em nosso presente contexto, além do interesse em esboçar o domínio, nos casos em que $2 \leq n \leq 3$ (Exemplos 1.2.1 e 1.2.2 anteriores), também estamos interessados em esboçar a imagem, nos casos em que $2 \leq m \leq 3$, (Exemplos 1.2.3, 1.2.8 e 1.2.11, a seguir) e conjuntos de nível, nos casos em que $2 \leq n \leq 3$, (Exemplos 1.2.5, 1.2.7 e 1.2.12, a seguir).

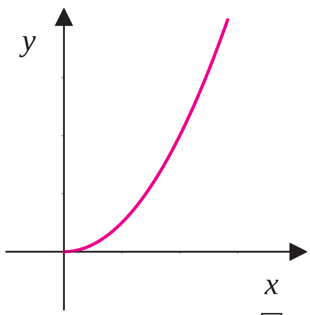
Agora faremos alguns exemplos utilizando os conceitos vistos anteriormente.

Exemplo 1.2.3: Determine e esboce a imagem da função $F(t) = (t, t^2)$, $t \geq 0$.

Solução: Temos que a imagem de F é o conjunto

$$Im(F) = \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \geq 0\}.$$

Observe que $x = t$ e $y = t^2$, de modo que a imagem da função F é a parte da parábola $y = x^2$, com $x \geq 0$ (figura ao lado).



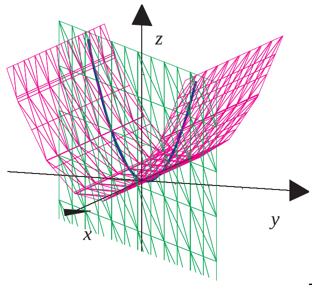
$\square$

Exemplo 1.2.4: Determine e esboce o gráfico da função $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Temos que o gráfico de F é o conjunto

$$Gr(F) = \{(t, t, t^2) \in \mathbb{R}^3 \mid \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que $x = t$, $y = t$ e $z = t^2$, de modo que o gráfico da função F é a interseção do plano $x = y$ com o cilindro $z = y^2$ (ou $z = x^2$) (figura ao lado).



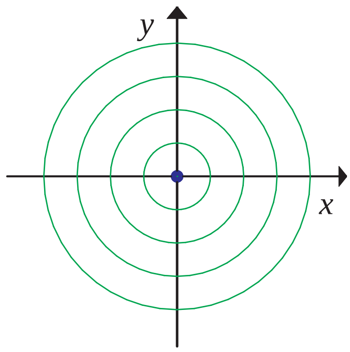
$\square$

Exemplo 1.2.5: Determine e esboce os conjuntos de nível da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução: Inicialmente, observe que $Im(f) = [0, \infty)$. Desta forma, temos que, para todo $k \geq 0$ real, o conjunto de nível k de f é dado por

$$C_k(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = k\}.$$

Observe que, para $k = 0$, temos apenas o ponto $(0, 0)$, i.e. $C_0(f) = \{(0, 0)\}$. Já para $k > 0$, temos que os conjuntos de nível $k > 0$ de f são circunferências $x^2 + y^2 = k^2$, i. e. circunferências de raio k e centro na origem. Por exemplo,
para $k = 1$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 1$;
para $k = 2$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 4$;
para $k = 3$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 9$;
para $k = 4$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 16$.
Os conjuntos de nível de f encontram-se esboçados ao lado.



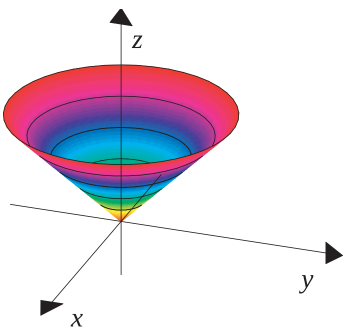
$\square$

Exemplo 1.2.6: Determine e esboce o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução: Temos que o gráfico de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Observe que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que o gráfico da função f é o semicone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z \geq 0$ (figura ao lado).



$\square$

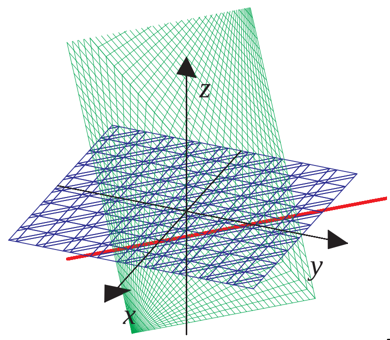
Exemplo 1.2.7: Determine e esboce o conjunto de nível (1,0) da função $F(x, y, z) =$

$(x+y+z\,,\,z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Solução: Temos que conjunto de nível (1,0) de F é o conjunto

$C_{(1,0)}(F)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z=1\ \text{ e }\ z=0\}$,

que consiste da interseção do plano $x+y+z=1$, com o plano $z=0$, o que fornece a reta $x+y=1$ no plano xy. O conjunto de nível $(1,0)$ de F está esboçado na figura ao lado.



□

Exemplo 1.2.8: Determine e esboce a imagem da função $F(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$.

Solução: Temos que a imagem de F é o conjunto dado por

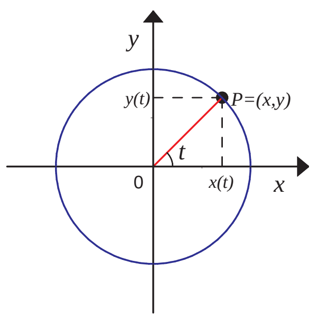
$$Im(F)=\{(\cos t,\ \operatorname{sen} t)\in\mathbb{R}^2\,|\,t\in[0,2\pi]\}.$$

Para esboçar este conjunto, observe inicialmente que, como $x(t)=\cos t$ e $y(t)=\operatorname{sen} t$, temos que $x^2(t)+y^2(t)=1$. Portanto, todos os pontos da imagem desta função estão contidos na circunferência $x^2+y^2=1$. Agora, veremos que as equações acima representam não apenas alguns pontos da circunferência, mas sim todos os pontos da mesma.

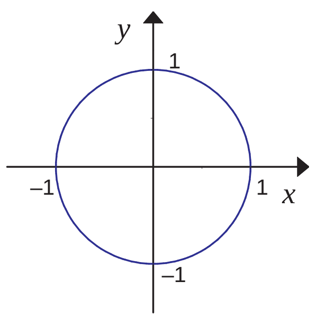
De fato, considere a circunferência de raio 1 e centro na origem esboçada ao lado. Neste caso, é fácil ver que

$$\begin{cases} x=x(t)=\cos t, \\ y=y(t)=\operatorname{sen} t, \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi],$$

onde t é o ângulo central, em radianos, indicado. Observe que quando t varia de 0 a 2π, o ponto $P=(x,y)$ parte do ponto $(1,0)$ e completa a volta ao longo da circunferência no sentido anti-horário.



Concluímos, portanto, que a imagem desta função é precisamente a circunferência $x^2+y^2=1$ (figura ao lado).

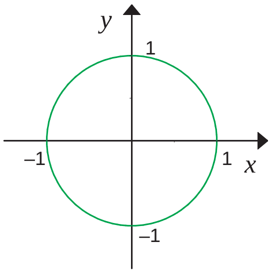


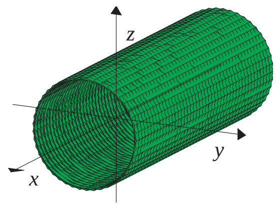
Exemplo 1.2.9: Esboce o gráfico da função $F(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Solução: Temos que o gráfico de F é o conjunto dado por

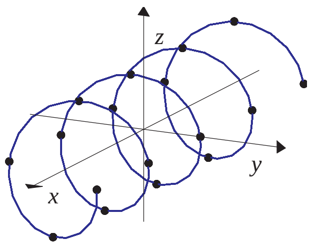
$$Gr(F) = \{(t, \cos t,\ \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Para esboçar este conjunto, observe que $y(t) = \cos t$ e $z(t) = \operatorname{sen} t$. Desta forma, adaptando a análise feita no Exemplo 1.2.8, acima, temos que $y^2(t) + z^2(t) = 1$. Ou seja, a projeção do gráfico de F, no plano yz, é a circunferência de raio 1 e centro na origem (figura abaixo à esquerda). Temos assim, que as coordenadas y e z do gráfico da função F estão contidas no cilindro circular reto $y^2 + z^2 = 1$ (figura abaixo à direita).





Além disto, a variável x vai aumentando conforme o valor de t vai crescendo, pois $x = t$. Concluímos, portanto, que o gráfico desta função é uma curva que faz uma espiral para frente, conforme o valor de t aumenta. Esta curva, semelhante a uma mola espiral, é chamada de *hélice*.



□

Veremos agora exemplos que mostram que um mesmo conjunto pode ser apresentado como imagem de uma função, ou como gráfico de outra função, ou ainda, como conjunto de nível de uma terceira função.

Exemplo 1.2.10: Determine o gráfico da função

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + y^2. \end{array}$$

Solução: Temos que o gráfico de f é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Note que $z = x^2 + y^2$, de modo que o gráfico da função f é o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

□

Exemplo 1.2.11: Determine a imagem da função

$$\begin{array}{rccc} H & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \mapsto & H(x,y) = (x, y, x^2 + y^2). \end{array}$$

Solução: Temos que a imagem de H é o conjunto

$$Im(H) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Novamente vemos que $z = x^2+y^2$, de modo que a imagem da função H é o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

$\square$

Exemplo 1.2.12: Determine o conjunto de nível 0 da função

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & g(x, y, z) = z - (x^2 + y^2). \end{array}$$

Solução: Temos que conjunto de nível 0 de g é o conjunto

$$C_0(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } z = x^2 + y^2\},$$

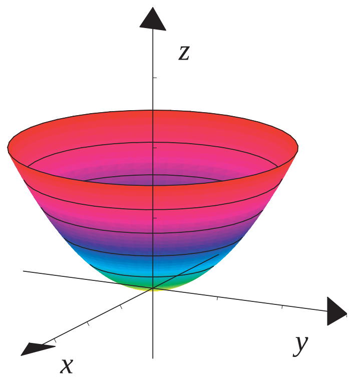
que equivale a

$$C_0(g) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

que também fornece o parabolóide $z = x^2 + y^2$.

$\square$

Observe que nos três exemplos acima, o conjunto pedido é o parabolóide $z = x^2+y^2$, esboçado ao lado. Compare esta observação com as definições apresentadas abaixo.



DEFINIÇÃO 1.2.2:

• Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ está definido *explicitamente* se S é o gráfico em $\mathbb{R}^{n+m}$ de uma função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

• Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ está definido *parametricamente* se S é a imagem em $\mathbb{R}^m$ de uma função $H : Dom(H) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

• Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ está definido *implicitamente* se S é o conjunto de nível em $\mathbb{R}^{n+m}$ de uma função $G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$.

No próximo capítulo, abordaremos, com mais detalhes, as funções vetoriais de uma variável real e veremos mais exemplos de identificação e esboço de imagens. Já no terceiro capítulo, vamos falar de funções reais de várias variáveis reais e veremos mais exemplos de identificação e esboço de domínios, conjuntos de nível e gráficos.

1.3 Exercícios

Exercício 1.3.1: Descreva o conjunto S, onde S é a curva $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, de forma explícita, implícita e paramétrica.

Resposta: Forma explícita: S é o gráfico da função f

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = x^3, \end{array}$$

isto é,

$$S = G(f) = \{(x, x^3) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Forma implícita: S é o conjunto de nível zero da função g

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = y - x^3, \end{array}$$

isto é,

$$S = C_0(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^3 = 0\}.$$

Forma paramétrica: S é a imagem da função F

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & F(t) = (t, t^3), \end{array}$$

isto é,

$$S = Im(F) = \{(t, t^3) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 1.3.2: Responda cada um dos itens a seguir.

a) Defina uma função f_1, cujo conjunto de nível 0 é a parábola $y = x^2$ em $\mathbb{R}^2$.

b) Defina uma função f_2, cujo conjunto de nível 0 é o cilindro parabólico $y = x^2$ em $\mathbb{R}^3$.

c) Determine e esboce o domínio e a imagem da função $f_3(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right)$.

d) Determine uma função f_4, tal que seu gráfico é a imagem da função f_3 do item (c).

Resposta:

a)

$$\begin{array}{rccc} f_1 & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = y - x^2, \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rccc} f_2 & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = y - x^2, \end{array}$$

c) Temos que o domínio de f_3 é o conjunto

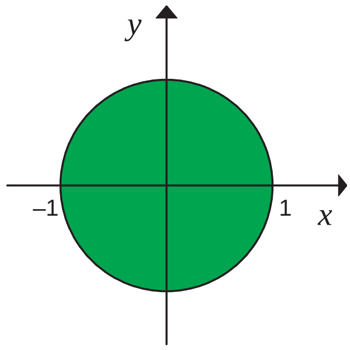
$$\begin{aligned} Dom(f_3) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1-(x^2+y^2) \geq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

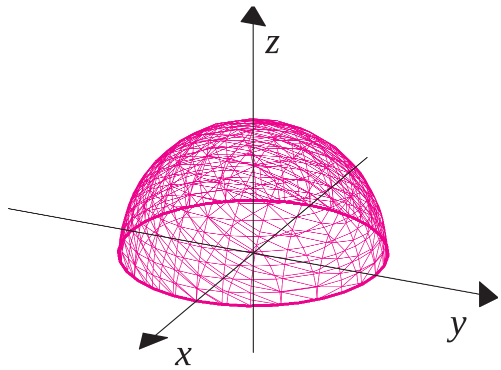
O domínio de f_3 é portanto a circunferência de centro na origem e raio igual a 1 e seu interior (figura abaixo à esquerda).

A imagem de f_3 é o conjunto

$$Im(f_3) = \left\{ \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

A imagem de f_3 é portanto a semi-esfera de centro na origem e raio igual a 1, com $z \geq 0$ (figura abaixo à direita).





d)

$$\begin{aligned} f_4 \quad : \quad Dom(f_4) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) \quad &\mapsto \quad f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

onde $Dom(f_4) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$. Observe que de fato,

$$G(f_4) = \left\{ \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\square$